

THEORIE DES GRAPHES

GENERALITES

Un **graphe** G est composé d'un ensemble de **sommets** et d'un ensemble d'**arcs** (un arc est un couple de sommets).

On note X l'ensemble des sommets et U l'ensemble des arcs (sous-ensemble de $X \times X$)

Le nombre de sommets est appelé **l'ordre** du graphe.

Dans un arc (x,y) , x est l'extrémité **initiale** et y l'extrémité **finale**. Un arc de la forme (x,x) est une **boucle**.

On dit que y est un **successeur** de x s'il existe un arc (x,y) ; on dit aussi que x est un **prédécesseur** de y .

Un graphe **simple** est un graphe sans boucle tel qu'entre deux sommets différents, il y ait au plus un arc.

Deux arcs sont dits **adjacents** s'ils ont une extrémité en commun.

Deux sommets sont dits adjacents si un arc les relie.

Le **demi-degré extérieur** d'un sommet x (noté $d_g^+(x)$) est égal au nombre d'arcs qui "partent" de x .

Le **demi-degré intérieur** d'un sommet x (noté $d_g^-(x)$) est égal au nombre d'arcs qui "arrivent" en x .

Le **degré** du sommet x (noté $d_g(x)$) est égal à la somme des demi-degrés.

Un graphe est dit **complet** quand deux sommets différents quelconques sont reliés par un arc.

On parle aussi de **clique** pour un graphe complet.

Un graphe est dit **biparti** si l'ensemble de sommets peut être partitionné en deux classes de sorte que les sommets d'une même classe ne soient jamais adjacents.

On appelle **sous-graphe** engendré par A (partie de X) le graphe obtenu en ne conservant que les sommets de A et les arcs les reliant.

On appelle **graphe partiel** un graphe obtenu en supprimant des arcs au graphe initial.

On appelle **chaîne** une succession d'arcs, chaque arc intermédiaire de la séquence ayant une extrémité en commun avec l'arc précédent et l'autre extrémité en commun avec l'arc suivant.

Une chaîne ne rencontrant pas deux fois le même sommet est dite **élémentaire**.

Une chaîne ne rencontrant pas deux fois le même arc est dite **simple**.

On appelle **chemin** une chaîne "bien orientée".

On appelle **cycle** une chaîne simple qui "boucle"
(les arcs de début et de fin sont adjacents par leur sommet libre).

On appelle **circuit** un cycle "bien orienté".

Un graphe est dit **connexe** ssi deux sommets différents quelconques sont reliés par une chaîne.

On appelle **composante connexe** du graphe une classe d'équivalence de la relation définie sur les sommets de la manière suivante : deux sommets sont en relation s'ils sont égaux ou s'il existe une chaîne les reliant.

On appelle **ensemble d'articulation** d'un graphe un sous-ensemble de sommets dont la suppression "déconnecte" le graphe.

On dit qu'un graphe est **k-connexe** si le cardinal minimal d'un ensemble d'articulation est $\geq k$.

On appelle **graphe valué** un graphe où chaque arc possède une valeur.

On dira qu'un graphe est **planaire** s'il est possible de le représenter dans le plan de sorte que les sommets soient des points du plan, les arcs des courbes simples ne se rencontrant pas en dehors de leurs extrémités.

On appelle chaîne **eulérienne** une chaîne empruntant tous les arcs du graphe une fois et une seule.

On appelle chaîne **hamiltonnienne** une chaîne passant par tous les sommets du graphes une fois et une seule.

On peut bien évidemment étendre les deux notions précédentes aux chemins, cycles, circuits.