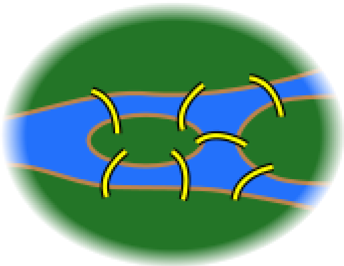
GRAPHES
TD N°1

Questions :

1) Combien la clique d'ordre n comporte-t-elle d'arcs ?
2) Combien le Graphe biparti complet $K_{m,n}$ comporte-t-il d'arcs ?
3) A quoi est égal la somme des degrés des sommets d'un graphe ?

Exercice 1 :
Une tour peut-elle aller de la case supérieure gauche d'un échiquier à la case inférieure droite, en passant une seule fois par toutes les cases de l'échiquier ? Généraliser.

Exercice 2 : Les Ponts de Königsberg



Est-il possible de faire une promenade en traversant tous les ponts une fois et une seule ?

Exercice 3 :
Dans une soirée, toutes les personnes serrent la main à 3 autres personnes sauf une, qui ne serre la main qu'à une seule personne. Peut-il y avoir 21 personnes à la soirée ? Généraliser.

Exercice 4 :
Peut-on recouvrir un échiquier "tronqué" (auquel on a enlevé la case supérieure gauche et la case inférieure droite) à l'aide de dominos (1 domino = 2 cases) ?

Exercice 5 :
Montrer que tout graphe non orienté simple possède au moins deux sommets ayant même degré

Exercice 6 :
Soit d le degré du sommet de plus faible degré d'un graphe ayant m arcs et n sommets.
Montrer que : $n \leq 2m / d$.

CORRECTIONS

Questions :

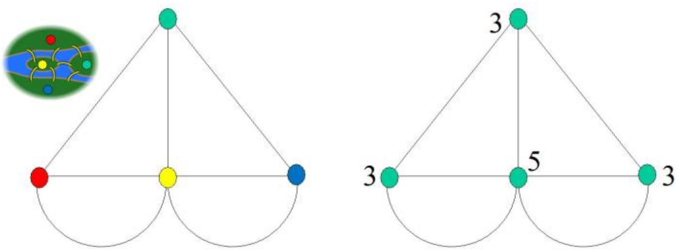
1) Le nombre d'arcs d'une clique est égal au nombre de couples de sommets possibles, soit **$n(n-1)/2$**.
2) m sommets d'un côté, n de l'autre, tous les arcs possibles entre, soit **mn** arcs.
3) Quand on fait la somme des degrés d'un graphe, on compte chaque arc 2 fois (une fois pour son extrémité initiale, une fois pour son extrémité finale) ; on obtient donc **$2m$.**

Exercice 1 :

Un échiquier est composé de 64 (8x8) cases alternativement noires et blanches.
Les cases supérieure gauche et inférieure droite sont de la même couleur.
64 cases à parcourir, c'est 63 déplacements d'une case à sa voisine.
Or chaque déplacement représente un changement de couleur.
63 étant impair, la case de départ et celle d'arrivée ne peuvent avoir la même couleur.

Exercice 2 :

Construisons un graphe où chaque région est un sommet et chaque arc, un pont :



Le nombre de ponts

Chaque fois qu'on arrive à un sommet, on doit en repartir ; le degré de chaque sommet doit donc être pair sauf le sommet de départ et le sommet d'arrivée.
Il y a 4 sommets de degré impair, la promenade est donc impossible.

Exercice 3 :

S'il y a n personnes, le nombre total de mains serrées sera de $3(n-1)+1 = 3n-2$.
Si n est impair, $3n-2$ est impair.
Or le nombre total de mains serrées doit être pair (2 mains serrées à chaque serrage) ; c'est donc impossible.

Exercice 4 :

Chaque domino recouvre une case noire et une case blanche.
L'échiquier tronqué possède 32 cases blanches et 30 noires (ou l'inverse).
Avec des dominos, on ne peut recouvrir qu'une zone avec un nombre égal de cases blanches et noires.
C'est donc impossible.

Exercice 5 :

Les degrés possibles sont : 0 1 2 3…….$(n-1)$; il y en a donc n.
Le degré 0 correspond à un sommet isolé, le degré $(n-1)$ à un sommet relié à tous les autres.
On ne peut donc avoir les 2 simultanément.
Parmi les n degrés différents possibles, seuls donc $(n-1)$ sont disponibles simultanément.
S'il y en a n à distribuer, il y en aura donc nécessairement 2 au moins identiques.

Exercice 6 :

Chaque degré est supérieur ou égal à d.
La somme des degrés est donc supérieure ou égale à nd.
Mais cette somme est aussi égale à $2m$.