

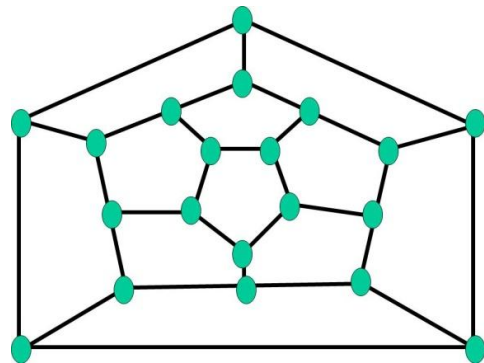
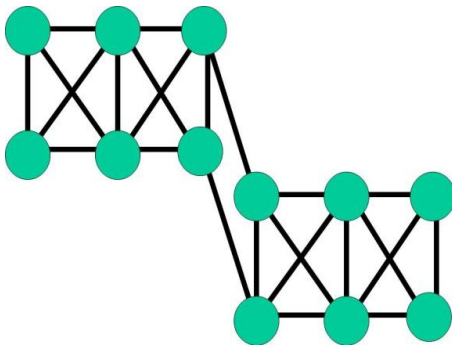
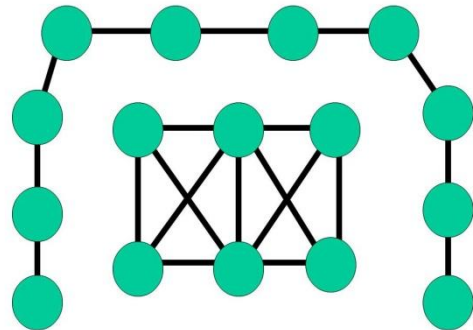
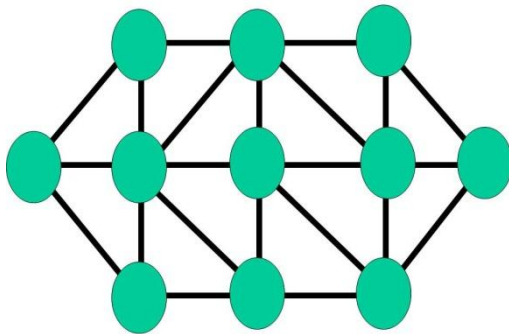
THEORIE DES GRAPHS

TD N°4

Exercice 1 :

Le sélectionneur de l'Equipe de France de Rugby désire constituer une équipe de 15 joueurs où chaque joueur aurait déjà été coéquipier de 7 autres exactement (et donc ne connaîtrait pas les 7 restants), de façon à assurer à la fois cohérence et originalité du jeu pratiqué. Il vous demande de l'aider. Pouvez-vous le faire ?

Exercice 2 : Déterminer κ pour les 4 graphes ci-dessous :



Exercice 3 :

Montrer qu'un graphe simple d'ordre n ($n > 2$) dont les degrés de tous les sommets sont supérieurs ou égaux à $n/2$ est hamiltonien (i.e. possède un cycle hamiltonien, c'est à dire passant par tous les sommets du graphe).

Indication :

Considérer un graphe satisfaisant aux hypothèses et non hamiltonien maximal.

Considérer deux sommets x et y non adjacents.

Considérer la chaîne hamiltonienne joignant x et y (en montrer l'existence)

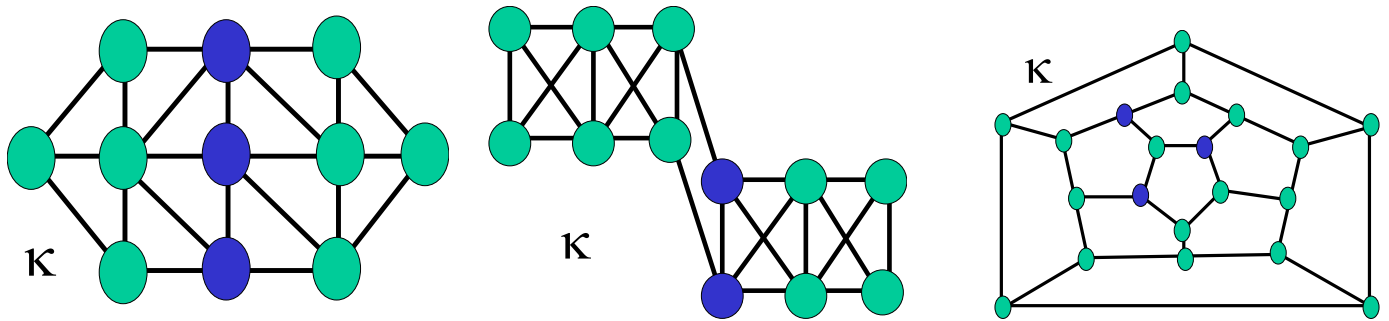
Considérer l'ensemble S des sommets de cette chaîne dont les successeurs sont adjacents à x et l'ensemble T des sommets de cette chaîne adjacents à y .

CORRECTIONS

Exercice 1 :

Si on construit le graphe des connaissances, il aura 15 sommets tous de degré 7, la somme des degrés sera alors égale à $7 \times 15 = 105$ arcs ; or la somme des degrés = $2m$, elle doit donc être paire. C'est donc impossible.

Exercice 2 :



Exercice 3 :

Considérons un graphe satisfaisant aux hypothèses et non hamiltonien maximal.

Considérons deux sommets x et y non adjacents.

Si on rajoute l'arc xy qui n'existe pas dans le graphe, le graphe ainsi obtenu ne sera plus non hamiltonien : il existera donc un cycle hamiltonien ; en enlevant l'arc xy de ce cycle, on obtient une chaîne hamiltonienne de x à y

Soit $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ la chaîne hamiltonienne de x à y : $x_1 = x$ et $x_n = y$.

Considérons l'ensemble S des sommets de cette chaîne dont les successeurs sont adjacents à x :

Le nombre de sommets de S est supérieur ou égal à $n/2$

Considérons l'ensemble T des sommets de cette chaîne adjacents à y . Il en est de même pour T .

On en déduit que l'intersection de S et de T est non vide.

Soit x_i le sommet commun à S et T : x_{i+1} est adjacent à x et x_i est adjacent à y :

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, y, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_{i+1}, x)$ est un cycle hamiltonien.

CONTRADICTION.