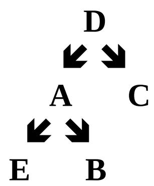
THEORIE DES GRAPHES
TD5

Exercice 1 : Considérons un arbre dont les sommets sont des lettres de l'alphabet qu'on transforme en arborescence en lui choisissant une racine.
A cette arborescence, on va associer un mot construit en prenant chaque sommet pendant par ordre alphabétique, en lui associant la lettre du sommet précédent dans l'arborescence, puis en recommençant l'opération sur l'arborescence partielle obtenue en supprimant les sommets pendants et ce jusqu'à arriver à la racine, les parties de mots obtenues à chaque étape étant mises bout à bout.

Exemple : A l'arborescence ci-dessous sera associée le mot **ADAD**.



a) Montrer que les mots associés à une arborescence sur n sommets ont tous la même longueur.
b) Dire comment on peut retrouver une arborescence à partir d'un mot et montrer que celle-ci est unique.
c) En déduire que le nombre d'arbres sur n sommets vaut n^{n-2}.

CORRECTIONS

Exercice 1 :

Les sommets pendants de l'arbre en exemple sont E, B, C soit, par ordre alphabétique BCE.

Le prédécesseur de B est A, celui de C est D, celui de E est encore A, d'où le mot ADA.

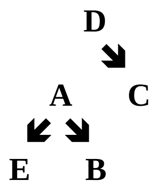
Si on enlève BCE, le sommet pendant est maintenant A, son « père » est D qu'on rajoute à droite de ADA.

a) Tous les sommets du graphe, hormis la racine donnent naissance à une lettre dans le mot ; tous les mots seront donc de longueur n-1
b) Comment retrouver l'arborescence à partir du mot ?

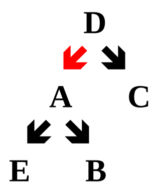
Reprenons le mot ADAD : il est de longueur 4, donc correspond à un arbre d'ordre 5 avec les sommets ABCDE

Les lettres qui ne sont pas présentes dans le mot seront les sommets pendants de l'arborescence : BCE

En prenant le mot à partir de la gauche : A sera le père de B et de E et D celui de C, d'où le graphe suivant :



Il reste la lettre D dans le mot, BCE étant éliminés, la seule lettre non présente est le A, on en déduit que D est le père de A



Cette construction est, à chaque étape, unique : il y a donc autant de mots que d'arborescences, autant d'arborescences que de mots.

Or il y a n^{n-1} mots de longueur n-1, il y a donc n^{n-1} arborescences d'ordre n.

c) Chaque arbre donne naissance à n arborescences en fonction de la racine choisie (qui peut être n'importe quel sommet).

   Il y a donc n fois plus d'arborescences que d'arbres ; le nombre d'arbres est donc égal à n^{n-1} / n, soit n^{n-2}.